MATEMÁTICAS AVANZADAS

Estructura y objetivos del curso

El objetivo central del presente curso consiste en estudiar las principales técnicas de la optimización y su aplicación a diversos problemas de la economía. El curso se encuentra dividido en dos partes: en la primera se introducen problemas de optimización lineal y no lineal, así como sus principales técnicas de resolución y aplicaciones a problemas de la economía; en la segunda parte se introducen las principales técnicas de la optimización dinámica, así como ejemplos de aplicación al área económica.

En ambas partes del curso, después de la introducción de los problemas elementales, se procederá al estudio de las principales propiedades teóricas: condiciones necesarias y suficientes de optimalidad. Para ilustrar la teoría se analizarán algunos ejemplos básicos, para después proceder a estudiar problemas más sofisticados procedentes de diferentes corrientes de la economía.

El curso comienza con la introducción de problemas de programación lineal y su modelización, para posteriormente desarrollar el método del simplex y la teoría de dualidad. Posteriormente se analizan algunos problemas de optimización no lineal, presentándose condiciones necesarias de primer orden y suficientes de segundo orden para la caracterización de la solución. Diversas aplicaciones a la economía serán desarrolladas.

La segunda parte del curso comenzará con una introducción en la que se pretende resaltar la importancia de la metodología, así como revisar ciertos resultados preliminares. A continuación se efectuará un tratamiento detallado del cálculo variacional y su aplicación a una diversidad de problemas, principalmente económicos. En la parte final se desarrollará la teoría del control óptimo de ecuaciones diferenciales ordinarias y se analizarán algunos problemas presentes en la economía.

El curso resaltará las diferencias del análisis dinámico con respecto al estático e introducirá las principales técnicas para la optimización en dichos contextos. En el tratamiento de los problemas provenientes de la economía se resaltarán los supuestos de la modelización y se obtendrán políticas óptimas.

La estructura del curso es la siguiente:

Fecha		**Temática**	**Horas**
		Parte 1: Optimización lineal y no lineal	
1	Clase	Programación lineal: modelos.	2
2	Clase	Programación lineal: método del simplex	2
3	Clase	Programación lineal: dualidad.	2

4		Programación no lineal: ejemplos y condiciones de Kuhn-Tucker.	2
5		Programación no lineal: condiciones suficientes y aplicaciones.	2
Parte 2: Optimización dinámica			
6	Clase	Motivación. Ecuaciones diferenciales ordinarias.	2
7	Clase	Diagramas de fase	
		Cálculo variacional	
8	Clase	Funcional objetivo y problema fundamental del calculo variacional	2
9	Clase	Condiciones necesarias. Ecuaciones de Euler: ejemplos	2
10	Clase	Optimización dinámica de un monopolista	2
11	Clase	Condición general de transversalidad	2
12	Clase	Ajuste óptimo de demanda laboral	2
13	Clase	Condiciones suficientes de segundo orden	2
14	Clase	Planificación a horizonte infinito. Inversión óptima de una empresa	2
15	Clase	Ahorro nacional óptimo (Ramsey)	2
		Examen	2
		Control óptimo	
16	Clase	Problema fundamental y principio del máximo	2
17	Taller	Ejemplos de aplicación del principio del máximo	2
18	Clase	Condiciones finales alternativas	2
19	Clase	Interpretación económica del principio del máximo	2
20	Clase	Uso energético y calidad ambiental	2
21	Clase	Teoría neoclásica del crecimiento óptimo	2
22	Clase	Progreso tecnológico endógeno y exógeno	2
		Examen	

Parte 1: Optimización lineal y no lineal

1. Programación lineal: modelos

En esta sesión se introducirán algunos ejemplos sencillos de problemas de programación lineal y se los resolverá gráficamente para resaltar las ideas básicas de la teoría. Además se procederá a desarrollar modelos de problemas más complejos, que permitan desarrollar habilidades de modelización.

2. Programación lineal: método del simplex

A partir de la caracterización de la solución de un programa lineal como vértice de un polítopo, se procederá al planteamiento del método del simplex y al desarrollo del algoritmo a través de la tabla del simplex. Se realizarán ejemplos de aplicación.

3. Programación lineal: dualidad

Se planteará el programa dual de un programa lineal y se establecerán los principales teoremas de dualidad. Adicionalmente se analizará la interpretación económica de la dualidad y la importancia de los precios sombra.

4. Programación no lineal: ejemplos y condiciones de Kuhn-Tucker

En esta sesión se introducirán algunos ejemplos de problemas de programación no lineal y se obtendrán las condiciones necesarias de Kuhn-Tucker, así como ciertos criterios de calificación para las restricciones.

5. Programación no lineal: condiciones suficientes y aplicaciones

Sobre la base de las condiciones de Kuhn-Tucker, se revisarán algunos tipos de condiciones suficientes para problemas de programación no lineal. Adicionalmente se desarrollarán algunas aplicaciones económicas en detalle.

Parte 2: Optimización dinámica

La utilidad del control óptimo en economía esta directamente relacionada con el papel que se le otorgue al análisis dinámico con respecto al análisis estático. Incluso dentro del contexto de este último existe generalmente una simplificación de los modelos con vista a aplicar la programación lineal como herramienta básica de optimización. Tanto las relaciones no lineales como las dinámicas son sin duda sumamente importantes para una mejor comprensión de los fenómenos, con lo cual las herramientas matemáticas para el diseño de políticas óptimas en dicho contexto son prioritarias.

6. Motivación y ecuaciones diferenciales ordinarias

En esta primera sesión se desarrollará el contenido del curso y presentarán ejemplos iniciales de problemas de cálculo variacional y control óptimo en economía. Se ilustrará como gestionar la producción e inventario de una empresa planteando un modelo de control óptimo. También se planteará como un problema de cálculo variacional la cuestión de maximizar el empleo al tiempo que se controla la inflación. Adicionalmente se presentarán ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias y se repasarán las técnicas más elementales para la resolución de las ecuaciones de segundo orden.

7. Diagramas de fase

En esta sesión se presentará el esquema general para la elaboración de diagramas de fase en el caso de sistemas de ecuaciones diferenciales autónomos. Después de desarrollar un ejemplo elemental, se utilizará el modelo de Eisner-Strotz para ejemplificar la construcción de un diagrama de fase en un problema de economía.

2.1. Cálculo variacional

Desde sus orígenes el cálculo variacional a estado ligado íntimamente con los problemas de la física. La optimización de una integral ha sido objeto de interés básicamente al tratar de optimizar la energía de los sistemas o los diseños geométricos. Es recién con la matemátización de la economía, que la aplicación de esta rama se vuelve posible y atractiva para esta disciplina. La presentación del cálculo de variaciones incluye el planteamiento del problema fundamental, así como de las condiciones necesarias y suficientes de óptimo. Las condiciones de transversalidad son de suma importancia cuando se tienen puntos terminales variables.

8. Funcional objetivo y problema fundamenta del cálculo variacional
Se introducirá la noción, así como la definición de funcional objetivo y se presentarán algunos ejemplos que ilustran la importancia que tienen en un problema de optimización. La caracterización de los funcionales: standard, Bolza y Mayer, también será desarrollada. Se planteará el problema fundamental del cálculo variacional y se analizarán las ideas para su resolución. La derivada de una integral definida será analizada, con miras a la obtención de la ecuación de Euler como condición necesaria.

9. Condiciones necesarias. Ecuación de Euler: ejemplos
La deducción de la ecuación de Euler como condición necesaria de primer orden será llevada a cabo. Se trabajarán distintos ejemplos del cálculo variacional con la intención de interiorizar el planteamiento y la resolución de la ecuación de Euler para los distintos casos.

10. Optimización dinámica de un monopolista
En esta sesión se analizará el modelo clásico de Evans sobre la dinámica de una empresa monopolista. Después de obtener el modelo, se procederá al planteamiento del problema de control óptimo y a su resolución, a través de la ecuación de Euler. Esta es una de las primeras aplicaciones históricas del cálculo variacional a la economía.

11. Condición general de transversalidad
Se introducirán los problemas con condiciones finales variables y se obtendrán, con la misma metodología que para la ecuación de Euler, las condiciones de transversalidad. Se presentarán algunos ejemplos para ilustrar su obtención, así como algunos casos especiales.

12. Ajuste óptimo de demanda laboral
Un modelo de ajuste de demanda laboral es analizado. El modelo, propuesto por Hamermesh, describe la dinámica de costos al efectuar un incremento de la fuerza de trabajo en una empresa. Se planteará el problema de cálculo variacional que busca minimizar costos y se procederá a su resolución.

13. Condiciones suficientes de segundo orden
En esta sesión se explicarán la clásica condición suficiente de segundo orden, bajo supuestos de diferenciabilidad en el funcional y las restricciones. La verificación de la condición será realizada en algunos ejemplos, para observar si se trata de un mínimo o un

máximo. Adicionalmente, criterios de concavidad o convexidad del funcional objetivo serán explicados.

14. Planificación a horizonte infinito. Inversión óptima de una empresa
Se introducirá el problema del cálculo variacional a horizonte infinito y se analizarán las condiciones para la convergencia del funcional objetivo, así como la particularidad de las condiciones de transversalidad en tal caso. La teoría se ilustrará con algunos ejemplos. Adicionalmente, se analizarán dos modelos diferentes para la elaboración de un plan óptimo de inversión para una empresa. Tanto con el modelo de Jorgenson como con el de Eisner-Strotz, se procederá a la derivación de la ecuación de Euler y de las condiciones de transversalidad, para luego hallar la política óptima.

15. Ahorro nacional óptimo
Se planteará el modelo de Ramsey para la distribución del ingreso nacional y se diseñará un problema de cálculo variacional para su ejecución. Se analizará la convergencia del funcional, la ecuación de Euler y las condiciones de transversalidad, para luego obtener la política óptima.

2.2. Control óptimo

La teoría del control óptimo, desarrollada a partir de los años 40 del siglo anterior básicamente en la ex URSS, ha tenido en su corta vida un desarrollo fructífero. Después del boom inicial relacionado con los viajes espaciales, esta rama se nutrió de la era computacional, para llegar a extenderse hoy en día a problemas más complejos como la optimización de fluidos o sistemas cuánticos. La presentación de la teoría del control óptimo de ecuaciones diferenciales ordinarias incluye, junto con el planteamiento del problema básico, la técnica de los multiplicadores de Lagrange y el célebre Principio del Máximo de Pontryaguin como condiciones necesarias de primer orden. Con una aproximación similar se derivan condiciones de transversalidad y condiciones necesarias en presencia de restricciones de estado.

16. Problema fundamental y principio del máximo
En esta sesión se presentará el problema fundamental de control óptimo y se resaltarán sus características básicas. El hamiltoneano también será introducido y se planteará el principio del máximo con el formalismo hamiltoneano. Se analizarán algunos ejemplos de su aplicación.

17. Ejemplos de aplicación del principio del máximo
Continuando con la presentación del principio del máximo, en esta sesión se analizarán más ejemplos de su aplicación, con miras a consolidar el conocimiento.

18. Condiciones finales alternativas
Se introducirán una serie de condiciones finales alternativas, así como las condiciones de transversalidad respectivas. Finalmente se ilustrará con ejemplos la aplicación de la teoría.

19. Interpretación económica del principio del máximo
En esta sesión se introducirá la interpretación económica del principio del máximo, así como de sus distintos componentes: estado adjunto, hamiltoneano, ecuaciones de estado y condiciones de transversalidad. Posteriormente se introducirá el principio del máximo para problemas con múltiples variables de control y de estado.

20. Uso energético y calidad ambiental
Se analizará un modelo de Forster que describe la dinámica del uso de energía en un medio contaminado. El problema de control óptimo consiste en maximizar la utilidad social (como función del consumo y la contaminación) teniendo en cuenta la dinámica del uso de energía.

21. Teoría neoclásica del crecimiento óptimo
Se tratará el problema de crecimiento óptimo teniendo como base la función neoclásica de producción y una modificación del modelo de Ramsey. El problema es analizado detalladamente, para luego hallar una política óptima.

22. Progreso tecnológico exógeno y endógeno
En esta sesión se analizarán modelos de crecimiento que tienen en cuenta el desarrollo tecnológico exógeno y endógeno. La variable tecnológica entra en la función de producción y se plantea el problema de maximización del funcional de utilidad, teniendo en cuenta la dinámica del sistema económico.

Bibliografía básica:

- A. Chiang: *Métodos fundamentales de economía matemática*, Mc Graw Hill, 1987.
- A. Chiang: *Elements of dynamic optimization*, Mc Graw Hill, 1992.

Bibliografía adicional:

- V. Alekseev, V. Tikhomirov and S. Fomin: *Optimal control*, Consultants Bureau, 1987.
- R. Dorfman, P.A. Samuelson y R. M. Solow: *Linear programming and economic analysis*, Dover 1987.
- W. H. Fleming and R. Rishel: *Deterministic and stochastic optimal control*, Springer Verlag, 1975.
- M. Intriligator: *Optimización matemática y teoría económica*, Prentice-Hall, 1973.
- A. Seierstad and K. Sydsaeter: *Optimal control theory and economic applications*, Elsevier, 1987.
- D. Zill: *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*, Ed. Iberoamérica, 1988.

Calificación:

Trabajos: 20%
Examen parcial: 30%
Examen final: 50%

Profesor: Juan Carlos de los Reyes.