

MATEMÁTICAS II

Estructura y objetivos del curso

El objetivo central del presente curso consiste en estudiar las principales técnicas de la optimización dinámica y su aplicación a diversos problemas de la economía, así como poner en perspectiva las principales líneas de investigación en Economía Matemática.

El curso comenzará con una introducción en la que se pretende resaltar la importancia de la metodología, así como revisar ciertos resultados preliminares. La segunda parte consiste en un tratamiento detallado del cálculo variacional y su aplicación a una diversidad de problemas, principalmente económicos. En la última parte del curso se desarrollará la teoría del control óptimo de ecuaciones diferenciales ordinarias y se analizarán algunos problemas presentes en la economía.

El curso resaltaré la importancia del análisis dinámico con respecto al estático e introducirá las principales técnicas para la optimización en dicho contexto. En el tratamiento de los problemas provenientes de la economía se resaltarán los supuestos de la modelización y se obtendrán políticas óptimas. Algunos métodos numéricos para la resolución de los problemas de optimización resultantes serán estudiados.

El curso será complementado con la lectura de artículos científicos que permitan tener una perspectiva de las principales líneas de investigación que se desarrollan actualmente en Economía Matemática. Se pondrá especial énfasis en el análisis de problemas de control óptimo, problemas de equilibrio y modelos de crecimiento con desarrollo tecnológico.

La estructura del curso es la siguiente:

| Sesión | | Temática | Horas |
|--------|--------|---|-------|
| | | Introducción | |
| 1 | Clase | Motivación | 2 |
| 2 | Clase | Ecuaciones diferenciales ordinarias | 2 |
| 3 | Clase | Funcional objetivo | 2 |
| | | Cálculo variacional | |
| 4 | Clase | Problema fundamental y condiciones necesarias | 2 |
| 5 | Taller | Ecuación de Euler: ejemplos | 2 |
| 6 | Clase | Optimización dinámica de un monopolista | 2 |
| 7 | Clase | Condición general de transversalidad | 2 |
| 8 | Clase | Ajuste óptimo de demanda laboral | 2 |

| | | | |
|----|--------|--|---|
| 9 | Clase | Condiciones suficientes de segundo orden | 2 |
| 10 | Clase | Planificación a horizonte infinito | 2 |
| 11 | Clase | Inversión óptima de una empresa | 2 |
| 12 | Clase | Ahorro nacional óptimo | 2 |
| 13 | Clase | Diagramas de fase | 2 |
| | | Control óptimo | |
| 14 | Clase | Problema fundamental y multiplicadores de Lagrange | 2 |
| 15 | Clase | Principio del máximo | 2 |
| 16 | Taller | Ejemplos de aplicación del principio del máximo | 2 |
| 17 | Clase | Condiciones finales | 2 |
| 18 | Clase | Interpretación económica del principio del máximo | 2 |
| 19 | Clase | El ciclo del negocio político | 2 |
| 20 | Clase | Uso energético y calidad ambiental | 2 |
| 21 | Clase | Teoría neoclásica del crecimiento óptimo | 2 |
| 22 | Clase | Progreso tecnológico endógeno y exógeno | 2 |

1. Motivación

En esta primera sesión se desarrollará el contenido del curso y presentarán ejemplos iniciales de problemas de cálculo variacional y control óptimo en economía. Se ilustrará como gestionar la producción e inventario de una empresa planteando un modelo de control óptimo. También se planteará como un problema de cálculo variacional la cuestión de maximizar el empleo al tiempo que se controla la inflación.

2. Ecuaciones diferenciales ordinarias

En esta sesión se presentarán ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias y se introducirán las técnicas más elementales para la resolución de las ecuaciones de segundo orden. La metodología se desarrolla con vistas a la solución de la ecuación de Euler, obtenida como condición necesaria de primer orden en los problemas de cálculo variacional.

3. Funcional objetivo

Se introducirá la noción, así como la definición de funcional objetivo y se presentarán algunos ejemplos que ilustran la importancia que tienen en un problema de optimización. La caracterización de los funcionales: standard, Bolza y Mayer, también será desarrollada.

4. Problema fundamental

Se planteará el problema fundamental del cálculo variacional y se analizarán las ideas para su resolución. La derivada de una integral definida será analizada, con miras a la obtención de la ecuación de Euler como condición necesaria. Posteriormente, la deducción de dicha ecuación será llevada a cabo.

5. Ecuación de Euler: ejemplos

Se trabajarán distintos ejemplos del cálculo variacional con la intención de interiorizar el planteamiento y la resolución de la ecuación de Euler para los distintos casos.

6. Optimización dinámica de un monopolista

En esta sesión se analizará el modelo clásico de Evans sobre la dinámica de una empresa monopolista. Después de obtener el modelo, se procederá al planteamiento del problema de control óptimo y a su resolución, a través de la ecuación de Euler. Esta es una de las primeras aplicaciones históricas del cálculo variacional a la economía.

7. Condición general de transversalidad

Se introducirán los problemas con condiciones finales variables y se obtendrán, con la misma metodología que para la ecuación de Euler, las condiciones de transversalidad. Se presentarán algunos ejemplos para ilustrar su obtención, así como algunos casos especiales.

8. Ajuste óptimo de demanda laboral

Un modelo de ajuste de demanda laboral es analizado. El modelo, propuesto por Hamermesh, describe la dinámica de costos al efectuar un incremento de la fuerza de trabajo en una empresa. Se planteará el problema de cálculo variacional que busca minimizar costos y se procederá a su resolución.

9. Condiciones suficientes de segundo orden

En esta sesión se explicarán la clásica condición suficiente de segundo orden, bajo supuestos de diferenciabilidad en el funcional y las restricciones. La verificación de la condición será realizada en algunos ejemplos, para observar si se trata de un mínimo o un máximo. Adicionalmente, criterios de concavidad o convexidad del funcional objetivo serán explicados.

10. Planificación a horizonte infinito

Se introducirá el problema del cálculo variacional a horizonte infinito y se analizarán las condiciones para la convergencia del funcional objetivo, así como la particularidad de las condiciones de transversalidad en tal caso. La teoría se ilustrará con algunos ejemplos.

11. Inversión óptima de una empresa

En esta sesión se analizarán dos modelos diferentes para la elaboración de un plan óptimo de inversión para una empresa. Tanto con el modelo de Jorgenson como con el de Eisner-Strotz, se procederá a la derivación de la ecuación de Euler y de las condiciones de transversalidad, para luego hallar la política óptima.

12. Ahorro nacional óptimo

Se planteará el modelo de Ramsey para la distribución del ingreso nacional y se diseñará un problema de cálculo variacional para su ejecución. Se analizará la convergencia del funcional, la ecuación de Euler y las condiciones de transversalidad, para luego obtener la política óptima.

13. Diagramas de fase

En esta sesión se presentará el esquema general para la elaboración de diagramas de fase en el caso de sistemas de ecuaciones diferenciales autónomos. Después de desarrollar un ejemplo elemental, se utilizará el modelo de Eisner-Strotz para ejemplificar la construcción de un diagrama de fase en un problema de economía.

14. Problema fundamental y multiplicadores de Lagrange

En esta sesión se presentará el problema fundamental de control óptimo y se resaltarán sus características básicas. El hamiltoneano también será introducido y se presentará una variedad de ejemplos de programación no lineal para entender e interiorizar la aplicación de la teoría de multiplicadores de Lagrange.

15. Principio del máximo

Con los preliminares de multiplicadores de Lagrange, en esta sesión se planteará el principio del máximo con el formalismo hamiltoniano y se analizarán algunos ejemplos de su aplicación.

16. Ejemplos de aplicación del principio del máximo

Continuando con la presentación del principio del máximo, en esta sesión se analizarán más ejemplos de su aplicación, con miras a consolidar el conocimiento.

17. Condiciones finales

Se introducirán una serie de condiciones finales alternativas, así como las condiciones de transversalidad respectivas. Finalmente se ilustrará con ejemplos la aplicación de la teoría.

18. Interpretación económica del principio del máximo

En esta sesión se introducirá la interpretación económica del principio del máximo, así como de sus distintos componentes: estado adjunto, hamiltoneano, ecuaciones de estado y condiciones de transversalidad. Posteriormente se introducirá el principio del máximo para problemas con múltiples variables de control y de estado.

20. El ciclo del negocio político

En esta sesión se analizará el modelo de Nordhaus que vincula la dinámica del desempleo con los períodos democráticos. Después de introducir el modelo, se plantea el problema de control óptimo que busca capitalizar votos al máximo para un partido determinado, teniendo en cuenta la influencia de las variables económicas. Se obtiene, resolviendo las condiciones necesarias, una política óptima.

21. Uso energético y calidad ambiental

Se analizará un modelo de Forster que describe la dinámica del uso de energía en un medio contaminado. El problema de control óptimo consiste en maximizar la utilidad social (como

función del consumo y la contaminación) teniendo en cuenta la dinámica del uso de energía.

22. Teoría neoclásica del crecimiento óptimo

Se tratará el problema de crecimiento óptimo teniendo como base la función neoclásica de producción y una modificación del modelo de Ramsey. El problema es analizado detalladamente, para luego hallar una política óptima.

23. Progreso tecnológico exógeno y endógeno

En esta sesión se analizarán modelos de crecimiento que tienen en cuenta el desarrollo tecnológico exógeno y endógeno. La variable tecnológica entra en la función de producción y se plantea el problema de maximización del funcional de utilidad, teniendo en cuenta la dinámica del sistema económico.

Bibliografía:

- A. Chiang: *Elements of dynamic optimization*, Mc Graw Hill, 1992.
- W. H. Fleming and R. Rishel: *Deterministic and stochastic optimal control*, Springer Verlag, 1975.
- M. Intriligator: *Optimización matemática y teoría económica*, Prentice-Hall, 1973.
- A. Seierstad and K. Sydsaeter: *Optimal control theory and economic applications*, Elsevier, 1987.
- V. Alekseev, V. Tikhomirov and S. Fomin: *Optimal control*, Consultants Bureau, 1987.
- D. Zill: *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*, Ed. Iberoamérica, 1988.