MATEMÁTICAS AVANZADAS

Estructura y objetivos del curso

El objetivo central del presente curso consiste en estudiar las principales técnicas de optimización matemática y su aplicación a diversos problemas de la economía. El curso se encuentra dividido en dos partes: en la primera se introducirán problemas de optimización no lineal estática, así como sus principales técnicas de resolución y aplicaciones a problemas de la economía; en la segunda parte se introducirán las principales técnicas de la optimización dinámica, así como ejemplos de aplicación al área económica.

En ambas partes del curso, después de la introducción de los problemas elementales, se procederá al estudio de las principales propiedades teóricas: condiciones necesarias y suficientes de optimalidad. Para ilustrar la teoría se analizarán algunos ejemplos básicos, para después proceder a estudiar problemas más sofisticados procedentes de diferentes corrientes de la economía.

El curso comienza con la introducción de problemas de programación no lineal y su modelización, presentándose condiciones necesarias de primer orden y suficientes de segundo orden para la caracterización de la solución. Se desarrollarán diversas aplicaciones, teniendo como punto central el estudio de soluciones óptimas a través de condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.

La segunda parte del curso comenzará con una introducción en la que se pretende resaltar la importancia de la metodología, así como revisar ciertos resultados preliminares. A continuación se efectuará un tratamiento detallado del cálculo variacional y su aplicación a una diversidad de problemas, principalmente económicos. En la parte final se desarrollará la teoría del control óptimo de ecuaciones diferenciales ordinarias y se analizarán algunos problemas presentes en la economía.

En el curso se pondrá énfasis en las diferencias del análisis dinámico con respecto al estático y se introducirán las principales técnicas de optimización en dichos contextos. En el tratamiento de los problemas provenientes de la economía se resaltarán los supuestos de la modelización y se obtendrán políticas óptimas.

La estructura del curso es la siguiente:

<table>
<tr><th colspan="2">Fecha</th><th>Temática</th><th>Horas</th></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">Parte 1: Optimización no lineal</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Clase</td><td>Algunos modelos. Soluciones óptimas y condiciones necesarias de primer orden.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Clase</td><td>Multiplicadores de Lagrange y condiciones de Karush-Kuhn-Tucker</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Clase</td><td>Condiciones suficientes de optimalidad. Aplicaciones en economía</td><td>3</td></tr>
</table>

Parte 2: Optimización dinámica			
4	Clase	Ecuaciones diferenciales ordinarias.	3
5	Clase	Continuación ecuaciones diferenciales ordinarias. Diagramas de fase	3
		Cálculo variacional	
6	Clase	Funcional objetivo y problema fundamental del calculo variacional. Ecuación de Euler	3
7	Clase	Ecuaciones de Euler: ejemplos y ejercicios. Optimización dinámica de un monopolista	3
8	Clase	Condición general de transversalidad. Ajuste óptimo de demanda laboral	3
9	Clase	Continuación ajuste óptimo de demanda laboral. Condiciones suficientes de segundo orden	3
10	Clase	Planificación a horizonte infinito. Inversión óptima de una empresa	3
11	Clase	Ahorro nacional óptimo (Ramsey)	3
		Examen	2
		Control óptimo	
12	Clase	Problema fundamental y principio del máximo. Ejemplos de aplicación del principio del máximo	3
13	Clase	Condiciones finales alternativas. Interpretación económica del principio del máximo	3
14	Clase	Uso energético y calidad ambiental. Teoría neoclásica del crecimiento óptimo	3
15	Clase	Progreso tecnológico endógeno y exógeno	3
		Examen	

Parte 1: Optimización no lineal

1. *Algunos modelos. Soluciones óptimas y condiciones necesarias de primer orden*

En esta sesión se introducirán algunos ejemplos de problemas de programación no lineal y se resaltarán las ideas básicas de su modelamiento. Además desarrollarán modelos más complejos, con la intención de desarrollar habilidades de modelamiento. Se explicarán adicionalmente los tipos de soluciones óptimas y se obtendrá un resultado de existencia.

Se estudiarán algunos problemas de optimización elementales (con una restricción de igualdad, con una restricción de desigualdad y con dos restricciones) con el objetivo de resaltar las principales dificultades en la caracterización de las soluciones óptimas y la noción de multipliador de Lagrange y condiciones de optimalidad.

Lectura: J. Nocedal and S.J. Wright: *Numerical Optimization*, Springer Verlag, 2006. Capítulo12.

2. *Multiplicadores de Lagrange y condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.*

Se continuará con la explicación de la noción de multiplicador de Lagrange. Se planteará el teorema de existencia de multiplicadores de Lagrange, así como el sistema de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker. Se estudiarán las condiciones de calificación de restricciones y se aplicarán los resultados a algunos ejemplos de aplicación.

Lectura: J. Nocedal and S.J. Wright: *Numerical Optimization*, Springer Verlag, 2006. Capítulo12.

3. Condiciones suficientes de optimalidad. Aplicaciones en economía.
Sobre la base de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker, se estudiarán algunos tipos de condiciones suficientes para problemas de programación no lineal. En particular, se estudiarán condiciones de segundo orden en base al análisis de la Hessiana y la Hessiana reducida.

Se desarrollarán algunas aplicaciones económicas en detalle. En particular, el problema de maximización de utilidad con restricciones de demanda y la combinación óptima de insumos de producción serán analizados. Adicionalmente, se expondrán algunos problemas de equilibrio, así como sus principales dificultades.

Lectura: A. Chiang: *Métodos fundamentales de economía matemática*, Mc Graw Hill, 1987. Capítulo 9.

Parte 2: Optimización dinámica

La utilidad del control óptimo en economía esta directamente relacionada con el papel que se le otorgue al análisis dinámico con respecto al análisis estático. Incluso dentro del contexto de este último existe generalmente una simplificación de los modelos con vista a aplicar la programación lineal como herramienta básica de optimización. Tanto las relaciones no lineales como las dinámicas son sin duda sumamente importantes para una mejor comprensión de los fenómenos, con lo cual las herramientas matemáticas para el diseño de políticas óptimas en dicho contexto son prioritarias.

4. Ecuaciones diferenciales ordinarias
En esta sesión se presentarán ejemplos de problemas de cálculo variacional y control óptimo en economía. Se ilustrará como gestionar la producción e inventario de una empresa planteando un modelo de control óptimo. También se planteará como un problema de cálculo variacional la maximización del empleo al mismo tiempo que se controla la inflación. Adicionalmente se presentarán ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias y se repasarán las técnicas más elementales para la resolución de las ecuaciones de segundo orden.

Lectura: D. Zill: *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*, Thomson International, 2006. Capítulos 1-4.

5. Continuación ecuaciones diferenciales ordinarias. Diagramas de fase.
Se continuará con el repaso de las técnicas más elementales para la resolución de las ecuaciones de segundo orden. En esta sesión se presentará también el esquema general para la elaboración de diagramas de fase en el caso de sistemas de ecuaciones diferenciales

autónomos. Después de desarrollar un ejemplo elemental, se utilizará el modelo de Eisner-Strotz para ejemplificar la construcción de un diagrama de fase en un problema de economía.

Lectura: A. Chiang: *Métodos fundamentales de economía matemática*, Mc Graw Hill, 1987. Capítulo 18.

2.1. Cálculo variacional

Desde sus orígenes el cálculo variacional a estado ligado íntimamente con los problemas de la física. La optimización de una integral ha sido objeto de interés básicamente al tratar de optimizar la energía de los sistemas o los diseños geométricos. Es recién con la matemátización de la economía, que la aplicación de esta rama se vuelve posible y atractiva para esta disciplina. La presentación del cálculo de variaciones incluye el planteamiento del problema fundamental, así como de las condiciones necesarias y suficientes de óptimo.

6. Funcional objetivo y problema fundamental del cálculo variacional. Ecuación de Euler.
Se introducirá la noción, así como la definición de funcional objetivo y se presentarán algunos ejemplos que ilustran la importancia que tienen en un problema de optimización. La caracterización de los funcionales: standard, Bolza y Mayer, también será desarrollada. Se planteará el problema fundamental del cálculo variacional y se analizarán las ideas para su resolución. La derivada de una integral definida será analizada y se introducirá la ecuación de Euler como condición necesaria de primer orden.

Lectura: A. Chiang: *Elements of dynamic optimization*, Mc Graw Hill, 1992. Capítulo 1.

7. Ecuación de Euler: ejemplos y ejercicios. Optimización dinámica de un monopolista
Se trabajarán distintos ejemplos del cálculo variacional con la intención de interiorizar el planteamiento y la resolución de la ecuación de Euler para los distintos casos.

En esta sesión se analizará el modelo clásico de Evans sobre la dinámica de una empresa monopolista. Después de obtener el modelo, se procederá al planteamiento del problema de control óptimo y a su resolución, a través de la ecuación de Euler. Esta es una de las primeras aplicaciones históricas del cálculo variacional a la economía.

Lectura: A. Chiang: *Elements of dynamic optimization*, Mc Graw Hill, 1992. Capítulo 2.

8. Condición general de transversalidad. Ajuste óptimo de demanda laboral
Se introducirán los problemas con condiciones finales variables y se obtendrán, con la misma metodología que para la ecuación de Euler, las condiciones de transversalidad. Se presentarán algunos ejemplos para ilustrar su obtención, así como algunos casos especiales. Un modelo de ajuste de demanda laboral será presentado.

Lectura: A. Chiang: *Elements of dynamic optimization*, Mc Graw Hill, 1992. Capítulo 3.

9. Continuación ajuste óptimo de demanda laboral. Condiciones suficientes de segundo orden
Un modelo de ajuste de demanda laboral es analizado. El modelo, propuesto por Hamermesh, describe la dinámica de costos al efectuar un incremento de la fuerza de trabajo en una empresa. Se planteará el problema de cálculo variacional que busca minimizar costos y se procederá a su resolución.

En esta sesión se explicarán la clásica condición suficiente de segundo orden, bajo supuestos de diferenciabilidad en el funcional y las restricciones. La verificación de la condición será realizada en algunos ejemplos, para observar si se trata de un mínimo o un máximo. Adicionalmente, criterios de concavidad o convexidad del funcional objetivo serán explicados.

Lectura: A. Chiang: *Elements of dynamic optimization*, Mc Graw Hill, 1992. Capítulos 3 y 4.

10. Planificación a horizonte infinito. Inversión óptima de una empresa
Se introducirá el problema del cálculo variacional a horizonte infinito y se analizarán las condiciones para la convergencia del funcional objetivo, así como la particularidad de las condiciones de transversalidad en tal caso. La teoría se ilustrará con algunos ejemplos. Adicionalmente, se analizarán dos modelos diferentes para la elaboración de un plan óptimo de inversión para una empresa. Tanto con el modelo de Jorgenson como con el de Eisner-Strotz, se procederá a la derivación de la ecuación de Euler y de las condiciones de transversalidad, para luego hallar la política óptima.

Lectura: A. Chiang: *Elements of dynamic optimization*, Mc Graw Hill, 1992. Capítulo 5.

11. Ahorro nacional óptimo
Se planteará el modelo de Ramsey para la distribución del ingreso nacional y se diseñará un problema de cálculo variacional para su ejecución. Se analizará la convergencia del funcional, la ecuación de Euler y las condiciones de transversalidad, para luego obtener la política óptima.

Lectura: A. Chiang: *Elements of dynamic optimization*, Mc Graw Hill, 1992. Capítulo 5.

2.2. Control óptimo

La teoría del control óptimo, desarrollada a partir de los años 40 del siglo anterior, ha tenido en su corta vida un desarrollo fructífero. Después del boom inicial relacionado con los viajes espaciales, esta rama se nutrió de la era computacional, para llegar a extenderse hoy en día a problemas más complejos como la optimización de fluidos o sistemas cuánticos. La presentación de la teoría del control óptimo de ecuaciones diferenciales ordinarias incluye, junto con el planteamiento del problema básico, la técnica de los multiplicadores de Lagrange y el célebre Principio del Máximo de Pontryaguin como condiciones necesarias de primer orden. Con una aproximación similar se derivan condiciones de transversalidad y condiciones necesarias en presencia de restricciones de estado.

12. Problema fundamental y principio del máximo
En esta sesión se presentará el problema fundamental de control óptimo y se resaltarán sus características básicas. El hamiltoneano también será introducido y se planteará el principio del máximo con el formalismo hamiltoneano. Se analizarán algunos ejemplos de su aplicación.

Continuando con la presentación del principio del máximo, se analizarán más ejemplos de su aplicación, con miras a consolidar el conocimiento.

Lectura: A. Chiang: *Elements of dynamic optimization*, Mc Graw Hill, 1992. Capítulo 7.

13. Condiciones finales alternativas. Interpretación económica del principio del máximo
Se introducirán una serie de condiciones finales alternativas, así como las condiciones de transversalidad respectivas. Finalmente se ilustrará con ejemplos la aplicación de la teoría.

En esta sesión se introducirá la interpretación económica del principio del máximo, así como de sus distintos componentes: estado adjunto, hamiltoneano, ecuaciones de estado y condiciones de transversalidad. Posteriormente se introducirá el principio del máximo para problemas con múltiples variables de control y de estado.

Lectura: A. Chiang: *Elements of dynamic optimization*, Mc Graw Hill, 1992. Capítulo 8.

14. Uso energético y calidad ambiental. Teoría neoclásica del crecimiento óptimo.
Se analizará un modelo de Forster que describe la dinámica del uso de energía en un medio contaminado. El problema de control óptimo consiste en maximizar la utilidad social (como función del consumo y la contaminación) teniendo en cuenta la dinámica del uso de energía.

Lectura: A. Chiang: Elements of dynamic optimization, Mc Graw Hill, 1992. Capítulo 9.

15. Progreso tecnológico exógeno y endógeno
En esta sesión se analizarán modelos de crecimiento que tienen en cuenta el desarrollo tecnológico exógeno y endógeno. La variable tecnológica entra en la función de producción y se plantea el problema de maximización del funcional de utilidad, teniendo en cuenta la dinámica del sistema económico.

Lectura: A. Chiang: *Elements of dynamic optimization*, Mc Graw Hill, 1992. Capítulo 9.

Bibliografía básica:

- A. Chiang: *Métodos fundamentales de economía matemática*, Mc Graw Hill, 1987.
- A. Chiang: *Elements of dynamic optimization*, Mc Graw Hill, 1992.

Bibliografía adicional:

- V. Alekseev, V. Tikhomirov and S. Fomin: *Optimal control*, Consultants Bureau, 1987.
- M. Kamien and N. Schwartz: *Dynamic Optimization*, Elsevier, 2001.
- M. Intriligator: *Optimización matemática y teoría económica*, Prentice-Hall, 1973.
- M. Intriligator and K. Arrow: *Handbook of Mathematical Economics, Vol. 1*, Elsevier, 1994.
- J. Nocedal and S.J. Wright: *Numerical Optimization*, Springer Verlag, 2006.
- A. Seierstad and K. Sydsaeter: *Optimal control theory and economic applications*, Elsevier, 1987.
- D. Zill: *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*, Thomson International, 2006.

Calificación:

Trabajos: 20%
Examen parcial: 30%
Examen final: 50%

Profesor: Juan Carlos de los Reyes.